Sommaire de la séquence 6

Objectifs

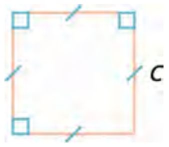
- Comprendre le concept de fonction en cherchant à résoudre des problèmes.
- Être capable d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique, un logiciel qui trace des représentations graphiques de fonctions, un tableur, pour rechercher des solutions à des problèmes divers.

Séance 1
J'étudie une famille de rectangles

Avant de commencer cette séance, lis attentivement les objectifs de la séquence 6. Prends ensuite ton cahier de cours et écris « SÉQUENCE 6 : FONCTIONS » en haut de la première page blanche. Fais de même avec ton cahier d'exercices. Effectue ensuite le test directement sur ton livret en cochant la ou les bonnes réponses. Une fois ce travail terminé, reporte-toi au livret de corrigés et ***étudie bien le corrigé de ce test****. Lis attentivement* ***les commentaires du professeur*** *: c'est nécessaire pour pouvoir effectuer les exercices qui suivent dans de bonnes conditions !*

JE RÉVISE LES ACQUIS DE LA 4e

1- Quelle est l'aire de ce carré en fonction de c ?



❒ $2c$ ❒ $4c$

❒ $4c^2$ ❒ c^2

2- On choisit un nombre. On lui ajoute 3, on multiplie le résultat obtenu par 5 puis on retranche 2 au résultat obtenu.
Si x est le nombre choisi, quel est le résultat de ce programme de calcul ?

❒ $x + 3 \times 5 - 2$
❒ $(x + 3) \times (5 - 2)$
❒ $(x + 3) \times 5 - 2$
❒ $3 \times 5 - 2$

Le problème suivant concerne les questions 3 et 4.

Un récipient se remplit d'eau. A l'instant $t = 0$, le récipient est vide. Ensuite, si t est le temps écoulé en secondes, la hauteur h d'eau en cm dans le récipient est : $h = 3 \times t$.

3- Quelle est la hauteur d'eau au bout de 2,5 s ?

❒ $\frac{25}{3}$ cm ❒ 7,5 cm

❒ 2,5 cm ❒ $\frac{3}{25}$ cm

4- Au bout de combien de temps la hauteur d'eau est-elle de 60 cm ?

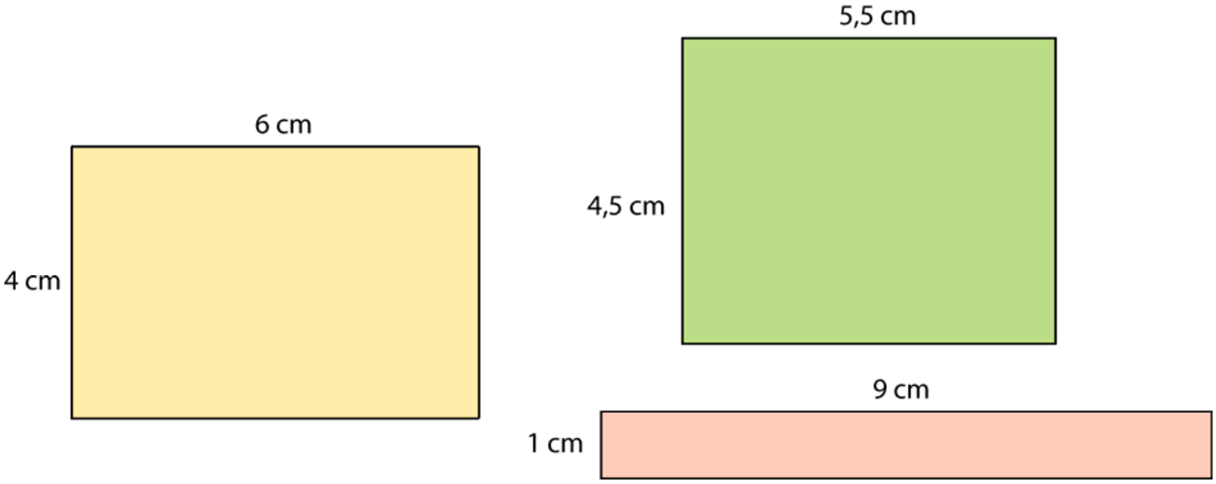
❒ 5 s ❒ 15 s

❒ 3 s ❒ 20 s

Effectue l'exercice suivant dans ton cahier d'exercices. Une fois l'exercice terminé, reporte-toi au livret de corrigés et lis attentivement les deux parties : ce que l'on attendait de toi et les commentaires du professeur.

✶EXERCICE 1

1- Détermine un « point commun » aux trois rectangles ci-dessous.



2-
a) Construis deux rectangles KLMN différents de périmètre 20 cm.
b) Si tu voulais construire d'autres rectangles KLMN de périmètre 20 cm, quelle distance maximum pourrais-tu choisir pour KL ? Quelle distance minimum ?
c) Combien penses-tu pouvoir construire de rectangles KLMN différents de périmètre 20 cm ?

3-
a) Pour chaque valeur KL du tableau ci-dessous, détermine LM pour que le rectangle KLMN ait pour périmètre 20 cm.

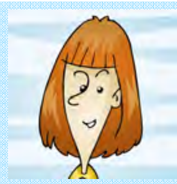
KL	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
LM	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……

b) On pose : $x = \text{KL}$.

Exprime la longueur LM en fonction de x. Si tu n'as pas trouvé au bout de 5 minutes, lis les commentaires d'Andry et d'Aurélie ci-dessous.

Andry pense que pour répondre à cette question, il suffit d'écrire que la moitié du périmètre du rectangle KLMN est égale à 10 cm.

Aurélie dit qu'elle a trouvé LM = 10 – x.



c) ***Pour exprimer que la longueur LM dépend de x, on peut la nommer l(x). Cela se lit « l de x ». On aurait aussi pu la noter f(x), ou g(x)…***
Recopie et complète la phrase ci-dessous, en remplaçant les pointillés par une expression contenant x.
• Ainsi : $l(x)$ = …………………..

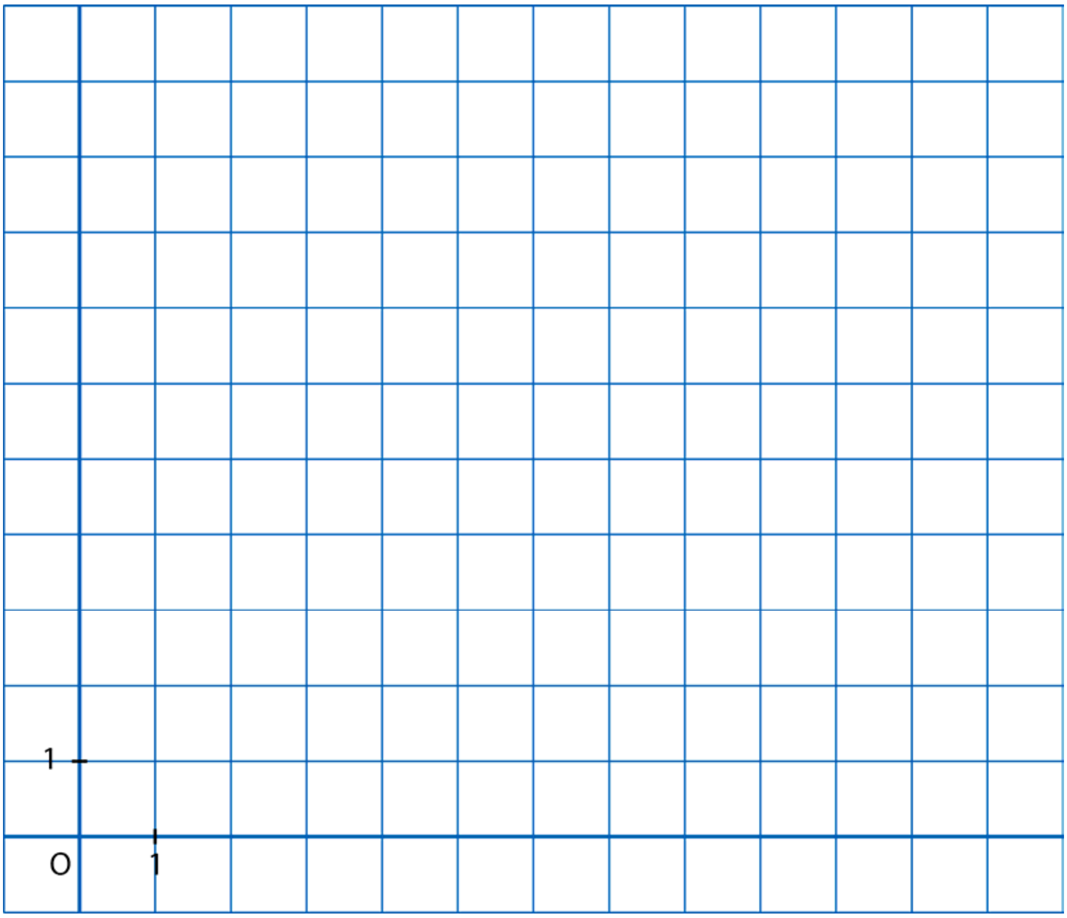
• Détermine $l(2,5)$. ***Remarque : l(2,5) se lit « l de 2,5 ».***

Le nombre l(2,5) est appelé image de 2,5 par la fonction l.
• Quelle est l'image de 4,1 par la fonction l ?

Un antécédent par la fonction l du nombre 9 est un nombre qui a pour image 9.
• Détermine un antécédent de 9 par la fonction l.

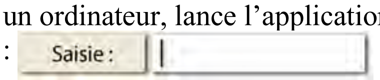
4-
a) Pour représenter graphiquement la fonction l :
• on place le point A_0, de coordonnées (0 ; $l(0)$), le point A_1 de coordonnées (1 ; $l(1)$), …, le point A_{10} de coordonnées (10 ; $l(10)$) dans le repère orthogonal suivant,
• on effectue un tracé passant par tous ces points.

Représente graphiquement la fonction l. Que peux-tu dire de ce tracé ?



b)
Détermine graphiquement l'image de 4,5 par la fonction *l*.
Détermine graphiquement un antécédent de 8,5 par la fonction *l*. Y en a-t-il d'autres ?

c) Détermine à l'aide d'un calcul l'image de 4,5 et l'antécédent de 8,5 par la fonction *l*.

5- Si tu possèdes un ordinateur, lance l'application geogebra. Dans le champ « saisie », en bas de l'écran : 

tape : l(x)=10–x .

Que remarques-tu ?

Pour te déplacer dans le repère, clique sur le bouton déplacement (en haut de l'écran) :  .
Tu peux ensuite te déplacer en cliquant dans le plan et en déplaçant la souris sans lâcher le bouton.

Prends une nouvelle page de ton cahier de cours. Lis attentivement le paragraphe ci-dessous puis recopie-le dans ton cahier de cours.

JE RETIENS
FONCTIONS
Le processus qui à un nombre x associe un unique autre nombre $f(x)$ est appelé « fonction f ».
Exemple : La fonction f qui associe à un nombre son double plus 1 peut se noter de deux façons :

- f est définie par : $f(x) = 2x + 1$
- $f : x \mapsto 2x + 1$

Définition : l'image de 2 par la fonction f est le nombre $f(2)$.
Exemple : Si f est définie par : $f(x) = 2x + 1$, on a : $f(2) = 2\times2 + 1 = 5$
L'image de 2 par f est 5.

Définition : Un antécédent de 3 par la fonction f est un nombre dont l'image est 3.
Exemple : Si f est définie par : $f(x) = 2x + 1$, on a : $f(1) = 2\times1 + 1 = 3$
1 est un antécédent de 3 par f.

Effectue l'exercice suivant dans ton cahier d'exercices. Une fois l'exercice terminé, reporte-toi au livret de corrigés et lis attentivement les deux parties : ce que l'on attendait de toi et les commentaires du professeur.

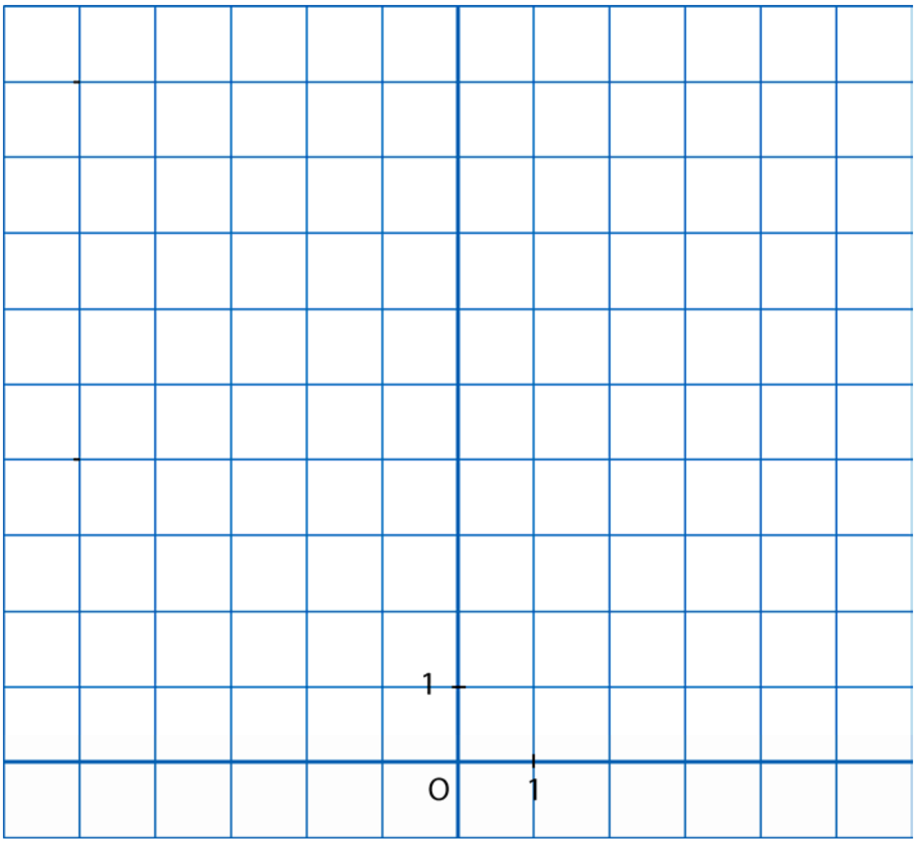
✶EXERCICE 2

1- La fonction f associe à un nombre x son carré. Définis la fonction f (c'est-à-dire, exprime-la comme dans le « Je retiens » précédent).

2- Remplis le tableau de valeurs ci-contre :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	……	……	……	……	……	……	……

3- Représente graphiquement la fonction f dans le repère ci-dessous.



Si tu possèdes un ordinateur, lance geogebra et trace la représentation graphique de la fonction *f*.

4-
a) Détermine les antécédents de 4 par *f*. Retrouve ce résultat à l'aide de la représentation graphique de la fonction *f*.
b) Détermine les antécédents de 5 par *f*. Retrouve ce résultat à l'aide de la représentation graphique de la fonction *f*.
c) Détermine les antécédents de – 2 par *f*. Retrouve ce résultat à l'aide de la représentation graphique de la fonction *f*.

5- Compare $f(1 + 2)$ et $f(1) + f(2)$.

Prends une nouvelle page de ton cahier de cours. Lis attentivement le paragraphe ci-dessous.

JE RETIENS
Définition : La représentation graphique d'une fonction *f* est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$.

Pour terminer cette séance, reporte-toi à la fiche de calcul mental n°1, à la fin de ce livret. Découpe une partie de la feuille selon les pointillés verticaux, puis replie-la le long des pointillés horizontaux afin de cacher les solutions.
Effectue ensuite la série 1 de cette fiche. Pour cela, lis les calculs proposés, calcule le résultat de tête puis écris les réponses sur une feuille de brouillon.
Une fois la série 1 terminée, reporte-toi aux solutions.

Séance 2
J'étudie une famille de rectangles –suite–

Effectue l'exercice suivant dans ton cahier d'exercices. Une fois l'exercice terminé, reporte-toi au livret de corrigés et lis attentivement les deux parties : ce que l'on attendait de toi et les commentaires du professeur.

✶EXERCICE 3

Cet exercice est la suite de l'exercice 1. On cherche maintenant à déterminer parmi les rectangles KLMN de périmètre 20 cm celui dont l'aire est la plus grande.

1-

a) Pour chaque valeur KL du tableau ci-dessous, détermine l'aire du rectangle KLMN.

KL	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
LM	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
Aire de KLMN	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……

b)

On pose $x = \text{KL}$.

Pour quelle valeur entière de x l'aire de KLMN est-elle la plus grande ?

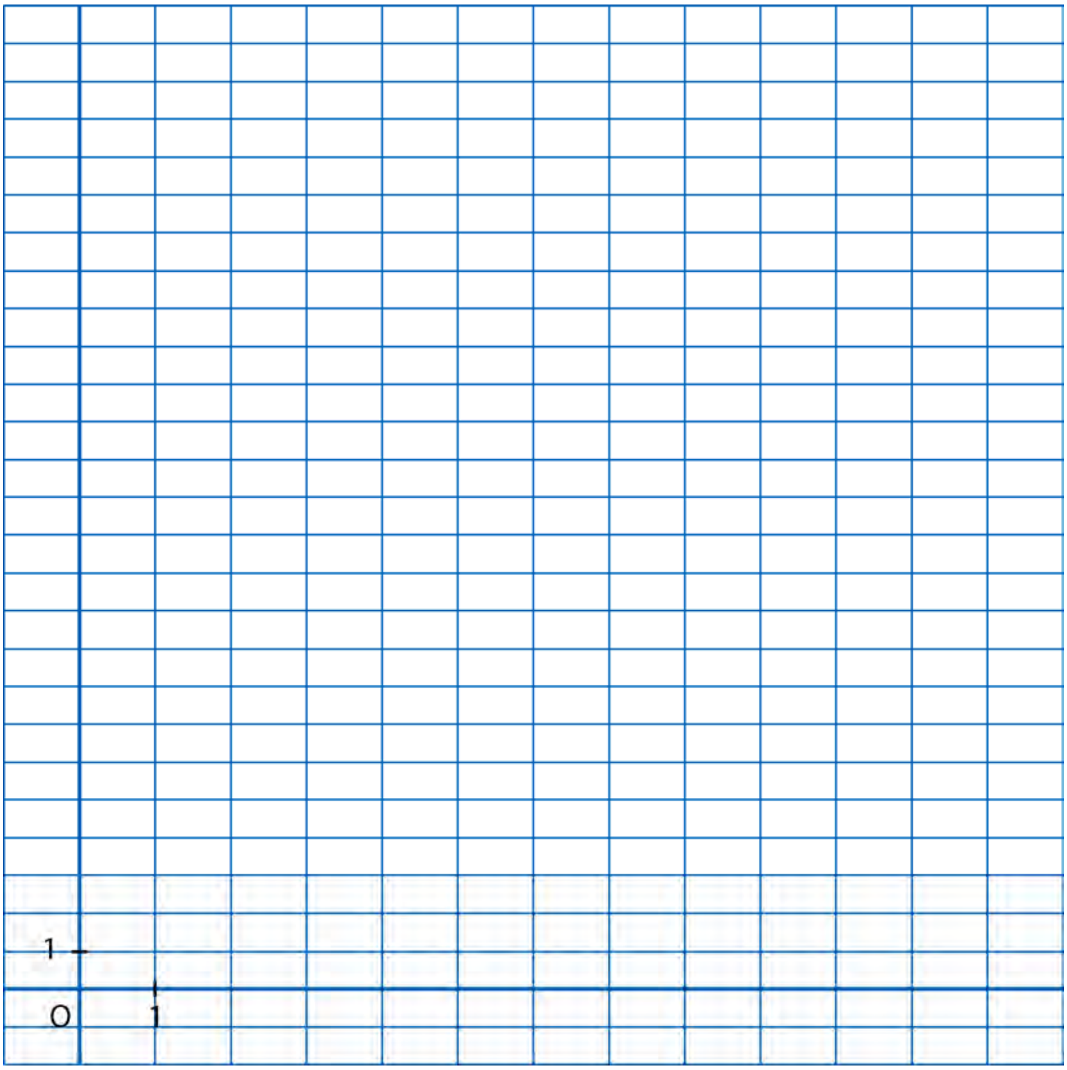
2-

a) On note $a(x)$ l'aire du rectangle KLMN. Détermine $a(x)$.

Si tu n'as pas réussi au bout de 5 minutes, lis le commentaire de Nadia ci-dessous.

Nadia se souvient que l'aire d'un rectangle est le produit de sa longueur par sa largeur.

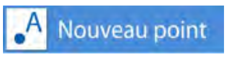
b) Représente graphiquement la fonction a dans le repère orthogonal suivant.



c) A l'aide du graphique ci-dessus, réponds aux deux questions suivantes :
Quelle est environ l'aire maximum d'un rectangle KLMN de périmètre 20 cm ? Quelle semble être alors la nature de ce quadrilatère ?

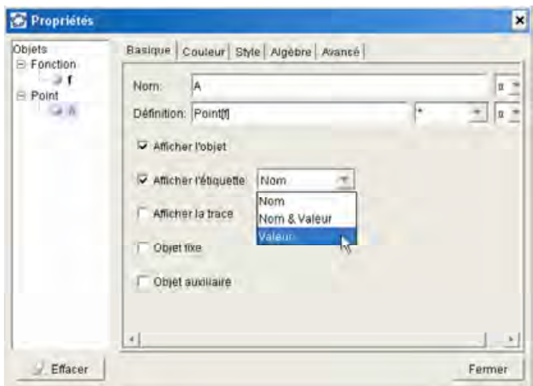
géométrie dynamique

d) Afin d'être plus sûr du résultat précédent, et si tu possèdes un ordinateur, lance geogebra et construis la représentation graphique de *a*.

Place un point sur la représentation graphique de *a*. Pour cela, clique sur 

puis sur la représentation graphique de *a*. Un point apparaît alors : tu peux le déplacer sur la représentation graphique de *a* en cliquant puis en déplaçant la souris sans relâcher le bouton.

Pour connaître l'aire maximum, il suffit de connaître les coordonnées de ce point lorsqu'il est « au plus haut de la courbe ». Pour cela, on clique avec le bouton droit sur le point, on choisit « propriété » dans le menu, puis on clique sur « valeur » comme montré ci-contre.



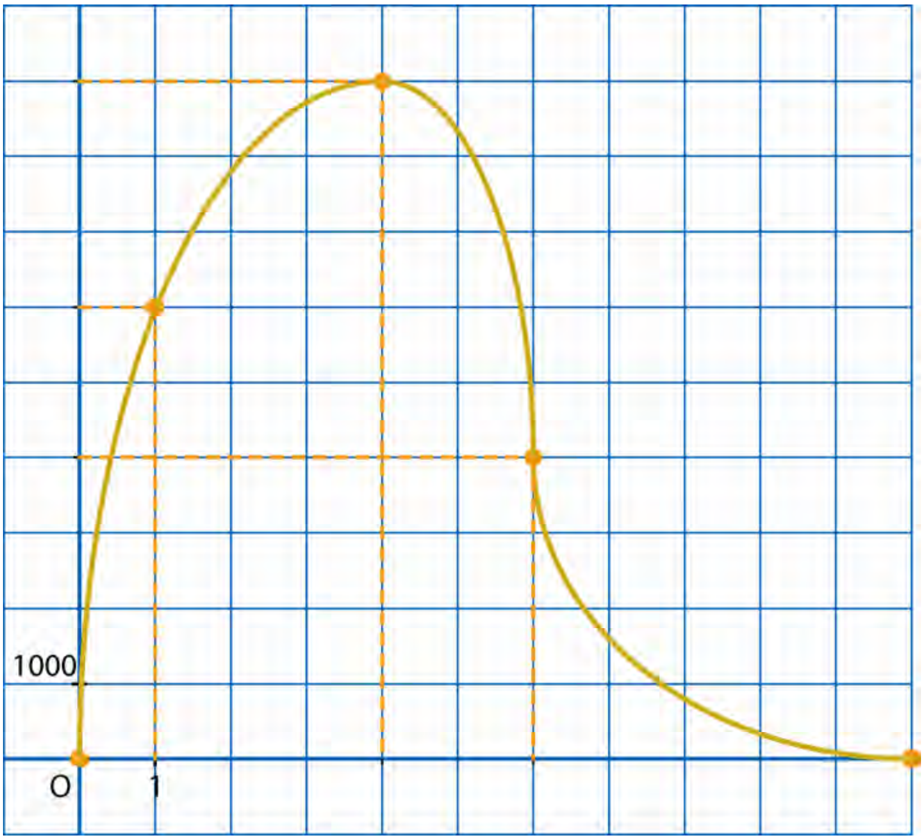
Les coordonnées du point apparaissent alors, et varient en fonction de la position du point sur la courbe.
Réponds à nouveau aux deux questions précédentes :
Quelle est environ l'aire maximum du quadrilatère KLMN de périmètre 20 cm ? Quelle semble être alors la nature de ce quadrilatère ?

Effectue l'exercice suivant dans ton cahier d'exercices. Une fois l'exercice terminé, reporte-toi au livret de corrigés et lis attentivement les deux parties : ce que l'on attendait de toi et les commentaires du professeur.

EXERCICE 4

Un avion décolle de Paris pour aller jusqu'à l'île de la Réunion. Le trajet dure 11 h.

On a représenté ci-dessous la fonction h telle que $h(t)$ est l'altitude en m de l'avion à l'instant t en heures.



1- Détermine $h(0)$, h (1), $h(4)$, $h(6)$ et $h(11)$.

2- Détermine approximativement l'altitude de l'avion au bout de 3 heures de vol.

3- Quelle a été l'altitude maximale de l'avion ? Au bout de combien d'heures de vol l'altitude a été maximale ?

4- Détermine une valeur approchée des antécédents de 6 000 m. A quoi correspondent-ils ?

Pour terminer cette séance, reporte-toi à la fiche de calcul mental n°1, à la fin de ce livret. Découpe une partie de la feuille selon les pointillés verticaux, puis replie-la le long des pointillés horizontaux afin de cacher les solutions.
Effectue ensuite la série 1 de cette fiche. Pour cela, lis les calculs proposés, calcule le résultat de tête puis écris les réponses sur une feuille de brouillon.
Une fois la série 1 terminée, reporte-toi aux solutions.

Séance 3
J'étudie un cas particulier de fonctions

Effectue l'exercice suivant dans ton cahier d'exercices. Une fois l'exercice terminé, reporte-toi au livret de corrigés et lis attentivement les deux parties : ce que l'on attendait de toi et les commentaires du professeur.

EXERCICE 5
Dans tout cet exercice, les températures sont en °C.
On sait que dans le village de Burg, la température est une fois et demi la température qu'il fait à Nantes. On souhaite étudier la température qu'il fait à Burg **en fonction de** celle qu'il fait à Nantes.
Si x est la température qu'il fait à Nantes, on note $t(x)$ la température qu'il fait à Burg.

1- Détermine la fonction t.

2- a) Complète le tableau ci-dessous.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$t(x)$	……	……	……	……	……	……	……

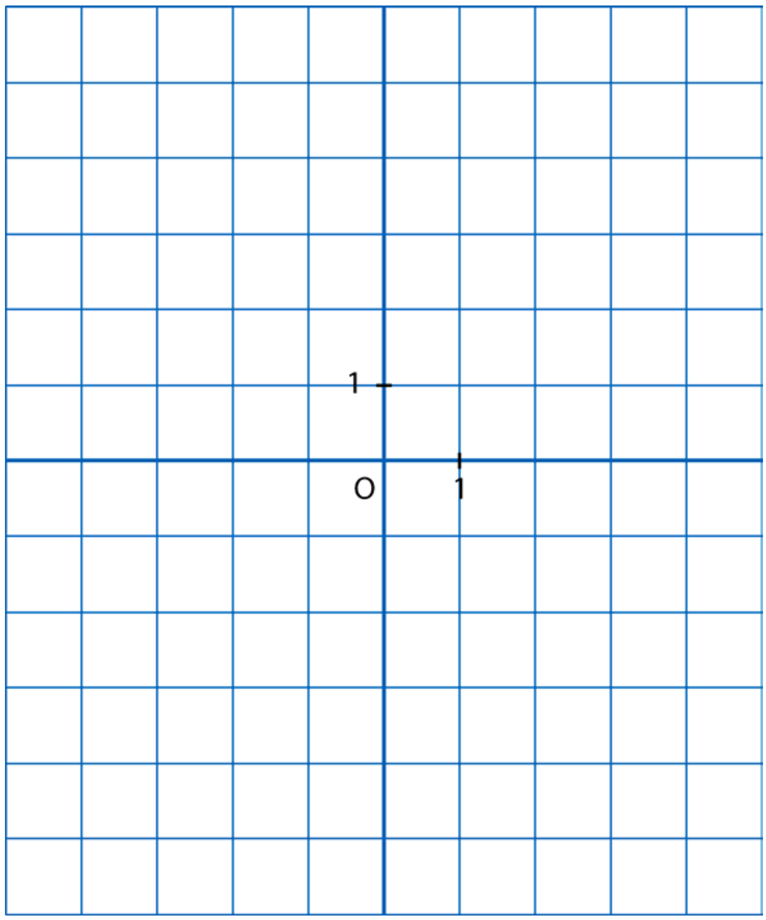
b) Que peux-tu dire du tableau ci-dessus et des grandeurs « température à Burg » et « température à Nantes » ?

c) Trace dans le repère orthogonal ci-contre une représentation graphique de la fonction t.

d) Que peux-tu dire de la représentation graphique de la fonction t ?

e) De combien de points avais-tu besoin pour pouvoir représenter graphiquement cette fonction ?

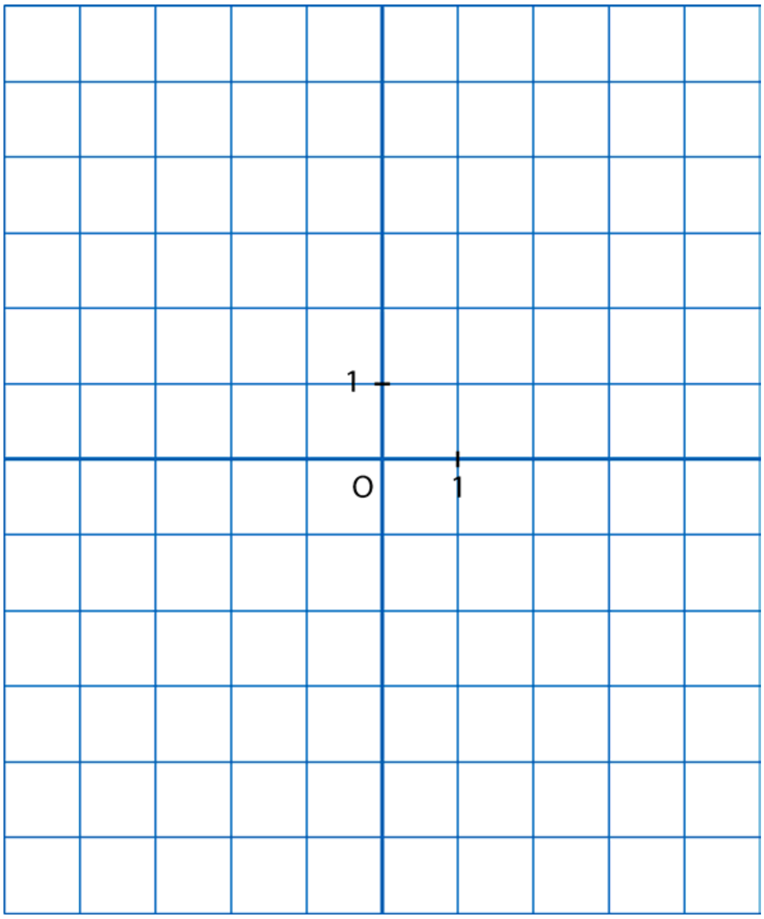
f) Quand les températures sont elles négatives à Burg ?



3-
a) Que peux-tu dire des représentations graphiques des fonctions ci-dessous ?

$g: \ x \mapsto -4x$ $\qquad h: \ x \mapsto 2x$ $\qquad n: \ x \mapsto -\dfrac{2}{3}x$

b) Trace les représentations graphiques Cg, Ch et Cn des fonctions g, h et n dans le repère ci-contre.



Prends une nouvelle page de ton cahier de cours. Lis attentivement le paragraphe ci-dessous puis recopie-le dans ton cahier de cours.

JE RETIENS

FONCTIONS LINEAIRES

Définition : a est un nombre

Une fonction est dite linéaire si elle est de la forme : $\boldsymbol{x \mapsto ax}$

Propriété (admise)

La représentation graphique d'une fonction linéaire est **une droite** passant **par l'origine.**

Exemples :

La fonction f telle que : $f(x) = 5x$ est une fonction linéaire.

Sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine et le point de coordonnées (1 ; 5).

Effectue l'exercice suivant dans ton cahier d'exercices. Une fois l'exercice terminé, reporte-toi au livret de corrigés et lis attentivement les deux parties : ce que l'on attendait de toi et les commentaires du professeur.

EXERCICE 6
Aurélie choisit un nombre au hasard, le multiplie par deux puis ajoute 3.
Elle appelle f la fonction qui au nombre x choisi au départ associe $f(x)$ le nombre qu'elle obtient après avoir multiplié par 2 puis ajouté 3.

Aurélie se pose le problème suivant : « la représentation graphique de f est-elle une droite ? ».

1- La fonction f est-elle une fonction linéaire ?
2- Construis sur ton cahier un repère orthogonal avec 1 cm pour 1 unité en abscisses et en ordonnées.
Que peux-tu dire de la fonction g définie par : $x \mapsto 2x$. Trace sa représentation graphique.
Place deux points M_1 et M_2 sur la représentation graphique de la fonction g.
Place le point N_1 de même abscisse que celle de M_1, mais qui appartient à la représentation graphique de f.
Aide : si x est l'abscisse de M_1, cherche à exprimer f(x) à l'aide de g(x)
Place le point N_2 de même abscisse que celle de M_2, mais qui appartient à la représentation graphique de f.
Comment peut-on déduire la représentation graphique de f de celle de la fonction g ?

3- Si tu possèdes un ordinateur, lance geogebra et trace la représentation graphique de la fonction g en tapant dans le champ de saisie « g(x)=2x ».
Clique sur la représentation graphique de la fonction obtenue avec le bouton droit et choisis « propriétés ».
Dans la fenêtre qui apparaît, coche « afficher l'étiquette » puis sélectionne « Nom & Valeur ».
Clique ensuite (avec le bouton gauche) sur la représentation graphique, puis appuie sur la touche $\boxed{\uparrow}$ du clavier. Essaie d'obtenir la représentation graphique de f.
Comment peut-on déduire la représentation graphique de f de celle de la fonction : $x \mapsto 2x$?

4- Trace la représentation graphique de f sans placer d'autres points que N_1 et N_2.

Prends une nouvelle page de ton cahier de cours. Lis attentivement le paragraphe ci-dessous puis recopie-le dans ton cahier de cours.

JE RETIENS
FONCTIONS AFFINES
Définition :
a et b sont des nombres.
Une fonction est dite affine si elle est de la forme : $\boldsymbol{x \mapsto ax + b}$.
Propriété (admise) :
Une représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**.
On admettra de plus que seules les fonctions affines sont représentées par des droites.

Remarque :
Une fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine (quand $b = 0$).

Exemples :
La fonction f telle que : $f(x) = 5x + 1$ est une fonction affine.
Sa représentation graphique est une droite qui passe (par exemple) par le point de coordonnées (0 ; 1) et le point de coordonnées (1 ; 6).

Pour terminer cette séance, reporte-toi à la fiche de calcul mental n°1, à la fin de ce livret. Découpe une partie de la feuille selon les pointillés verticaux, puis replie-la le long des pointillés horizontaux afin de cacher les solutions.
Effectue ensuite la série 1 de cette fiche. Pour cela, lis les calculs proposés, calcule le résultat de tête puis écris les réponses sur une feuille de brouillon.
Une fois la série 1 terminée, reporte-toi aux solutions.

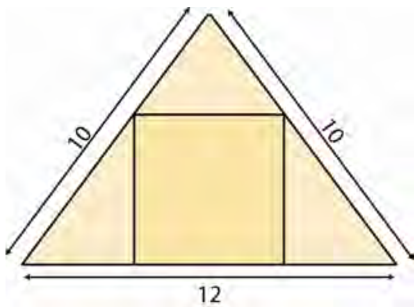
Séance 4
J'étudie le problème d'« Al-Khwarizmi »

Effectue l'exercice suivant dans ton cahier d'exercices. Une fois l'exercice terminé, reporte-toi au livret de corrigés et lis attentivement les deux parties : ce que l'on attendait de toi et les commentaires du professeur.

✶EXERCICE 7

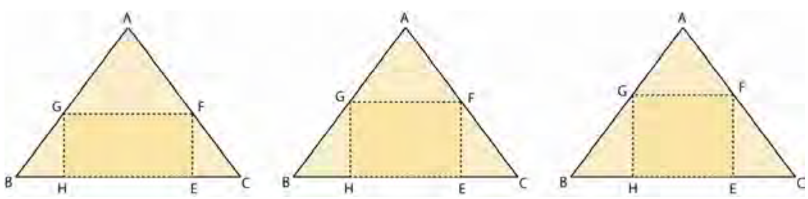
Voici un problème appelé problème d' « Al-Khwarizmi », en référence à un mathématicien perse, fondateur des mathématiques arabes (c'est lui qui est à l'origine du mot « algèbre »), né au VIII$^{\text{ème}}$ siècle :

Problème : Quelle est l'aire du carré inscrit dans le triangle isocèle ci-contre ?



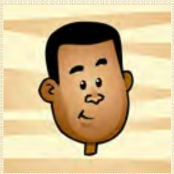
1- Essaie de répondre à la question posée en 5 minutes. Passe ensuite à la question ci-dessous.

2- Pour répondre au problème, nous allons essayer de construire un rectangle EFGH inscrit dans le triangle ABC, puis en faisant des essais, nous allons essayer d'obtenir un carré.



• Si tu ne possèdes pas d'ordinateur, construis un triangle isocèle ABC tel que : BC = 12 cm et AB = AC = 10 cm, et construis comme indiqué ci-dessous des rectangles EFGH afin de déterminer une valeur approchée de l'aire du carré inscrit dans le triangle.

Si tu as ensuite du mal à construire le carré EFGH, lis l'aide d'Andry ci-dessous.



Au lieu de construire un carré, j'ai commencé par construire un rectangle EFGH.
Pour cela, j'ai placé un point E sur [BC] puis j'ai construit le rectangle EFGH.
Comme EFGH n'était pas un carré, je l'ai effacé puis j'ai placé E à un autre endroit.
J'ai construit EFGH. Ce n'était pas encore bon alors j'ai déplacé un peu le point E.
A la fin, EFGH semblait être un carré.

géométrie dynamique

- Si tu possèdes un ordinateur, lance l'application geogebra et construis la figure dynamique constituée du triangle isocèle ABC et d'un rectangle EFGH inscrit dans le triangle ABC.

Si tu as du mal à construire le triangle ABC, lis l'aide de Thomas ci-dessous.

J'ai réussi à construire le triangle isocèle. Pour cela, j'ai créé deux points B et C de coordonnées respectives (0,0) et (12,0) à l'aide du menu Nouveau point.
Ensuite, j'ai créé deux cercles de rayon 10 cm de centres respectifs B puis C à l'aide du bouton Cercle (centre-rayon). J'ai ensuite créé le point A, un des deux points d'intersection des deux cercles en cliquant sur le bouton Intersection entre deux objets.
Ensuite, j'ai créé le triangle ABC en cliquant sur Polygones puis sur A, B, C, puis A.

Si tu as ensuite du mal à construire le rectangle EFGH, lis l'aide de Pauline ci-dessous.

J'ai réussi à construire le rectangle EFGH en plaçant un point E sur [BC]. Pour cela, clique sur Nouveau point puis clique sur le segment [BC]. Geogebra te propose différents choix. Choisis le segment.
Tu peux alors déplacer le point E n'importe où sur le segment [BC] si tu cliques préalablement sur le bouton Déplacer . Ensuite, j'ai construit le point F de la façon suivante : comme EFGH est un rectangle, (EF) est perpendiculaire à (BC) et passe par E. J'ai construit cette droite perpendiculaire en cliquant sur Droite perpendiculaire puis en cliquant sur (BC) puis sur le point E. Tu peux faire de même pour les autres sommets du rectangle.

Si tu n'arrives pas à construire la figure dynamique ouvre le fichier sequence6exercice7.

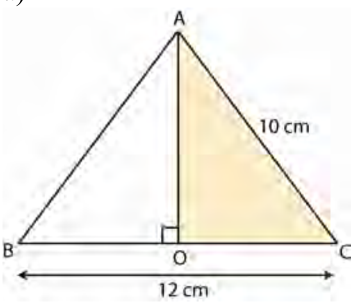
Pour une valeur donnée de EH, on peut construire un seul rectangle EFGH. On obtient alors une valeur pour EF.
Soit f la fonction qui à la longueur x de [EH] associe $f(x)$ la longueur EF.
Fais afficher x et $f(x)$ comme Nadia l'explique ci-dessous.

J'ai défini la longueur EH dans geogebra en cliquant sur Distance ou longueur puis en cliquant sur E puis sur H.
J'ai fait ensuite afficher cette longueur en cliquant sur Insérer un texte puis en entrant le texte : « x = »+distanceEH
J'ai ensuite défini la longueur EF comme précédemment puis j'ai fait afficher cette longueur en ntrant le texte : « f(x) = » +distance EF

Ensuite, fais bouger le point E sur le segment [BC], et essaie de trouver approximativement quand x et $f(x)$ sont des nombres égaux. Ensuite, réponds au problème d' « Al-Khwarizmi ».

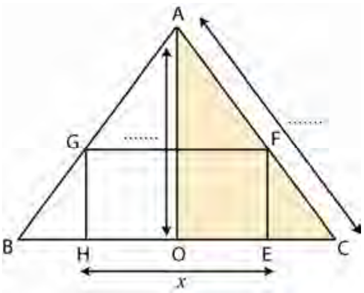
3-
Nous allons démontrer le résultat dont nous avons trouvé une approximation dans la question précédente.

a)



Détermine OC puis déduis-en AO.

b)



Commence par écrire sur la figure ci-contre les longueurs AO et AC.
Exprime OE en fonction de x.
Exprime EF en fonction de x.

Si tu n'arrives pas à exprimer EF en fonction de x, lis l'aide de Clément ci-dessous.

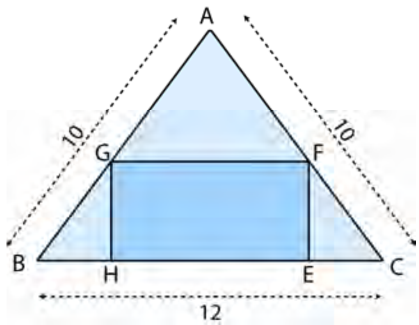
J'ai réussi à exprimer EF en fonction de x en utilisant la propriété de Thalès.

c) Détermine la valeur exacte de x pour laquelle EFGH est un carré. Résous alors le problème d'« Al-Khwarizmi »

Pour terminer cette séance, reporte-toi à la fiche de calcul mental n°1, à la fin de ce livret. Découpe une partie de la feuille selon les pointillés verticaux, puis replie-la le long des pointillés horizontaux afin de cacher les solutions.
Effectue ensuite la série 1 de cette fiche. Pour cela, lis les calculs proposés, calcule le résultat de tête puis écris les réponses sur une feuille de brouillon.
Une fois la série 1 terminée, reporte-toi aux solutions.

Séance 5
J’approfondis le problème d’« Al-Khwarizmi »

Effectue l’exercice suivant dans ton cahier d’exercices. Une fois l’exercice terminé, reporte-toi au livret de corrigés et lis attentivement les deux parties : ce que l’on attendait de toi et les commentaires du professeur.



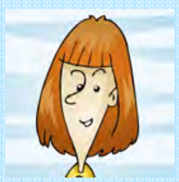
✶EXERCICE 8
Voici un autre problème lié à la situation d’ « Al-Khwarizmi ».

Problème : Pour quelle valeur de HE l’aire du rectangle EFGH est-elle maximum ?

1- Essaie de répondre à la question posée en 5 minutes.
Passe ensuite à la question ci-dessous.

2-
● Si tu ne possèdes pas d’ordinateur, construis un triangle ABC puis des rectangles EFGH. Effectue des mesures et calcule l’aire du rectangle EFGH. Essaie de trouver l’aire maximale de ce rectangle.
● Si tu possèdes un ordinateur, lance l’application geogebra et construis la figure dynamique.
Fais afficher la longueur HE et l’aire du rectangle EFGH.

Comment faire pour faire calculer l’aire du rectangle EFGH ? Lis la méthode d’Aurélie ci-dessous.



Je commence par créer le rectangle EFGH. Pour cela, je clique sur le bouton 

puis je clique sur le point E, puis F, puis G, puis H.
Ensuite, je clique sur le bouton 

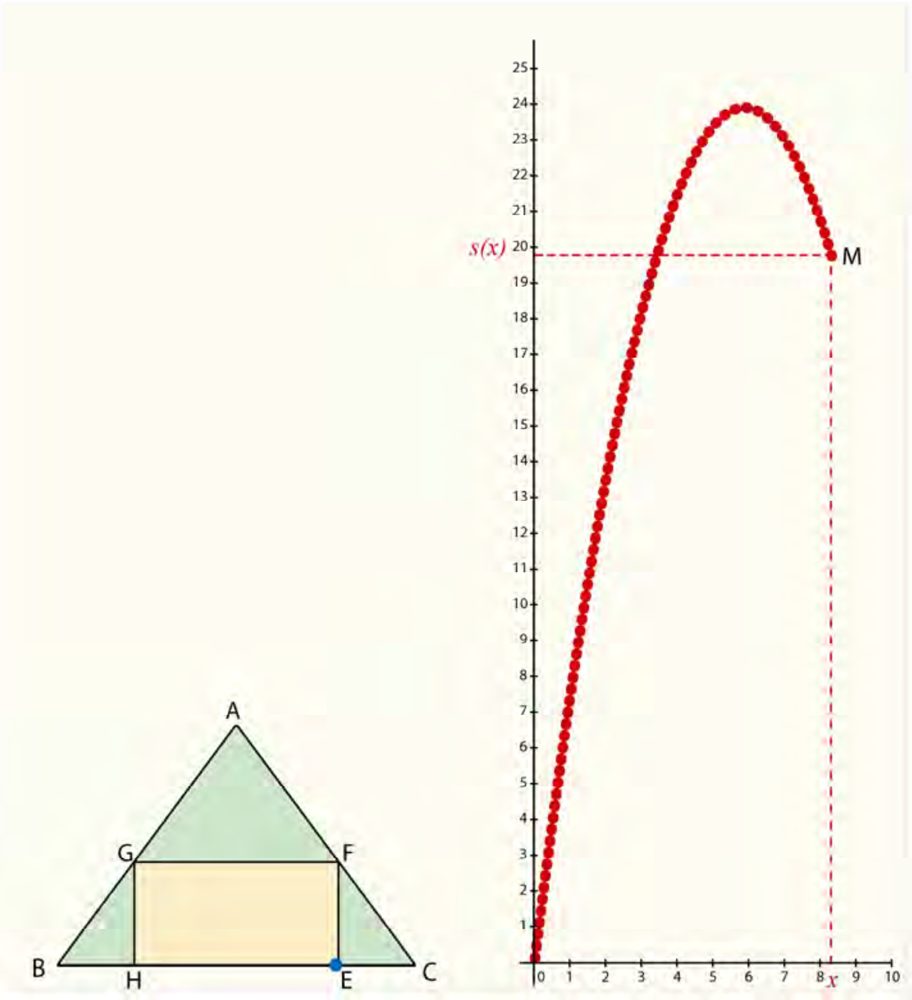
.

Déplace ensuite le point E sur le segment [BC], et détermine la valeur maximale de l’aire de EFGH.
Cette aire est-elle l’aire du carré solution du problème d’ « Al-Khwarizmi » (de la séance précédente) ?

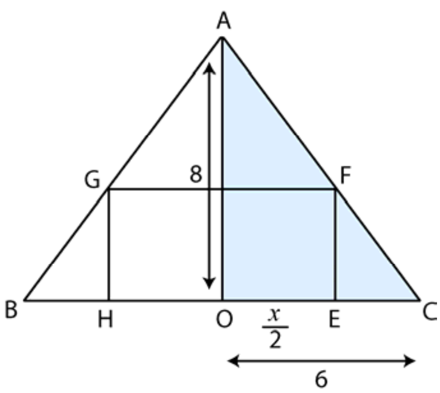
3-
Ouvre le fichier sequence6exercice8. Il présente à gauche de l'écran la figure de la question précédente.
A droite, pour chaque valeur de x c'est-à- dire de HE, est affiché le point d'abscisse x et d'ordonnée $s(x)$, où $s(x)$ est l'aire du rectangle EFGH.

a) Si tu déplaces le point E sur tout le segment [BC], quelle représentation graphique vois-tu se constituer ?

b) Quelle est la valeur maximale de $s(x)$? Pour quelle valeur de x le nombre $s(x)$ est-il maximal ?



4-



a) Détermine l'aire $s(x)$ du rectangle EFGH en fonction de x.
Tu peux utiliser l'expression de EF en fonction de x trouvée dans l'exercice précédent.

b) Ouvre à nouveau le fichier sequence6exercice8. Dans la case « saisie » en bas de l'écran, entre l'expression s(x) = … (les pointillés désignent l'expression que tu as trouvée dans la question a).
Déplace à nouveau le point E sur le segment [BC]. Retrouves-tu la représentation graphique précédente ?

Pour terminer cette séance, reporte-toi à la fiche de calcul mental n°1, à la fin de ce livret.
Découpe une partie de la feuille selon les pointillés verticaux, puis replie-la le long des pointillés horizontaux afin de cacher les solutions.
Effectue ensuite la série 1 de cette fiche. Pour cela, lis les calculs proposés, calcule le résultat de tête puis écris les réponses sur une feuille de brouillon.
Une fois la série 1 terminée, reporte-toi aux solutions.

Séance 6
J'étudie un problème de distance d'arrêt d'une voiture

Effectue l'exercice suivant dans ton cahier d'exercices. Une fois l'exercice terminé, reporte-toi au livret de corrigés et lis attentivement les deux parties : ce que l'on attendait de toi et les commentaires du professeur.

✶EXERCICE 9

1- Etude d'un problème

Problème : Un conducteur se rend compte qu'un arbre est tombé et lui barre la route. Au moment où le conducteur le voit, l'arbre est à 46 *m* de la voiture. Le conducteur freine instantanément (ce qui, en réalité, n'arrive jamais !). S'il ne percute pas l'arbre, c'est qu'il roule moins vite qu'une certaine vitesse. Laquelle ?

On se propose de la déterminer dans cette question 1.

On appelle distance d'arrêt la distance qu'une voiture parcourt entre le moment où le conducteur se rend compte du danger et le moment où la voiture s'arrête.

On sait que sur une route sèche, et lorsque le conducteur freine instantanément, la distance d'arrêt D dépend de la vitesse v du véhicule de telle sorte que : $D(v) = 0{,}06\ v^2$.

a) Calcule la distance d'arrêt d'une voiture qui roule à 10 m/s, 20 m/s, 30 m/s.
Peux-tu dire que la distance d'arrêt est proportionnelle à la vitesse ?
b) Résous le problème.
Tu donneras un arrondi au centième de la vitesse en m/s.

2-
Problème : Un conducteur se rend compte qu'un arbre est tombé et lui barre la route. Au moment où le conducteur le voit, l'arbre est à 46 *m* de la voiture. Entre le moment où le conducteur voit l'arbre et le moment où il commence à freiner, il s'écoule 2 secondes.
Si le conducteur ne percute pas l'arbre, c'est qu'il roule moins vite qu'une certaine vitesse. Laquelle ?

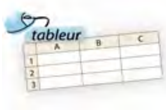
On se propose de la déterminer dans cette question 2.

a) Prouve que la distance d'arrêt lorsque le conducteur met 2 secondes à réagir est :

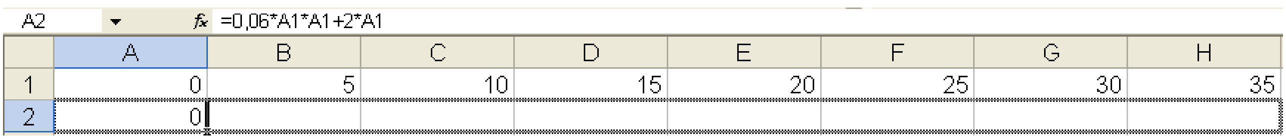
$$D(v) = 0{,}06\ v^2 + 2v.$$

b) Essaie de résoudre ce problème.
c) On veut représenter la fonction D. Pour cela, remplis le tableau ci-dessous :

v en m/s	0	5	10	15	20	25	30	35
$D(v)$ en m	……	……	……	……	……	……	……	……

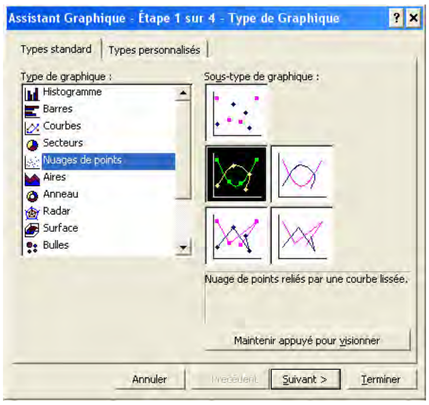


Si tu disposes d'un ordinateur, pour te simplifier la tâche, utilise un tableur.
Ecris 0 dans la case A_1, 5 dans la case B_1, …, 35 dans la case H_1.
Clique ensuite dans la case A_2.
Entre la formule « =0,06*A1*A1+2*A1 ».
Etends le résultat afin de calculer $D(0)$, …, $D(35)$.


A2 fx =0,06*A1*A1+2*A1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0	5	10	15	20	25	30	35
2	0							

d) Trace ensuite la représentation graphique de la fonction *D*. Pour cela :



• Si tu disposes d'un ordinateur, sélectionne les cases A_1,… H_1 et les cases A_2,… H_2 puis clique sur le menu « insertion » puis choisis « graphique ».
Sélectionne ensuite « nuage de points » puis le graphique indiqué ci-contre.
Tu obtiens alors une représentation graphique. Imprime cette représentation graphique et trouve une valeur approchée de la solution du problème.

• Si tu ne disposes pas d'un ordinateur, trace la représentation graphique de la fonction *D* sur une page de ton cahier. Détermine ensuite une valeur approchée de la solution du problème.

e) Si tu disposes d'un ordinateur, lance l'application geogebra.
• Trace la représentation graphique de la fonction *D* définie par :

$$D : \quad x \mapsto 0{,}06\, x^2 + 2x.$$

Remarque : dans l'expression d'une fonction, le nom de la variable n'a pas d'importance.
La fonction : $x \mapsto 0{,}06\, x^2 + 2x$ *et la fonction :* $v \mapsto 0{,}06\, v^2 + 2v$ *sont la même fonction.*
Pourquoi soudainement changer l'expression au cours de l'exercice ? Juste parce que geogebra ne comprend que les fonctions dont la variable s'appelle x !

• Place le point de coordonnées (0 ; 46).

Pour cela, lis l'aide de Thomas ci-dessous.

Je clique sur Nouveau point, je place le nouveau point n'importe où dans le plan. Ensuite, je clique dessus avec le bouton droit et je choisis « propriétés ». Dans le champ « Valeur », je rentre (0 , 46).

• Trace la droite horizontale passant par le point précédemment construit.

• Construis le point d'intersection de la courbe et de la droite.

• Fais afficher les coordonnées de ce point d'intersection.

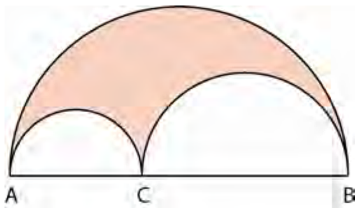
Déduis-en une valeur approchée de la solution du problème.

Pour terminer cette séance, reporte-toi à la fiche de calcul mental n°1, à la fin de ce livret.
Découpe une partie de la feuille selon les pointillés verticaux, puis replie-la le long des pointillés horizontaux afin de cacher les solutions.
Effectue ensuite la série 1 de cette fiche. Pour cela, lis les calculs proposés, calcule le résultat de tête puis écris les réponses sur une feuille de brouillon.
Une fois la série 1 terminée, reporte-toi aux solutions.

Séance 7
J'étudie le périmètre du tricercle de Mohr

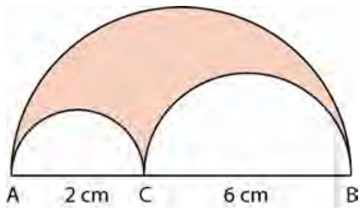
Effectue l'exercice suivant dans ton cahier d'exercices. Une fois l'exercice terminé, reporte-toi au livret de corrigés et lis attentivement les deux parties : ce que l'on attendait de toi et les commentaires du professeur.

✶EXERCICE 10



C est un point du segment [AB]

1- Le tricercle de Mohr est la figure géométrique coloriée ci-contre. Elle est délimitée par trois demi-cercles de diamètres [AC], [CB] et [AB].



a) Afin de bien comprendre le problème, calcule le périmètre du tricercle de Mohr pour les dimensions données sur la figure ci-contre.

b) Construis un tricercle de Mohr avec AC = 3 cm et CB = 5 cm puis calcule son périmètre.

c) Construis un tricercle de Mohr avec AC = 4 cm et BC = 4 cm puis calcule son périmètre.

d) Peux-tu émettre une conjecture au sujet du périmètre du tricercle de Mohr dont le grand diamètre AB est égal à 8 cm ?

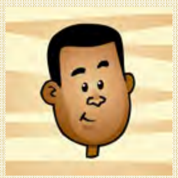
2- Nous allons étudier le périmètre p des tricercles de Mohr tels que AB = 8 cm en fonction de AC. On pose x = AC. On note $p(x)$ le périmètre du tricercle.

a) Exprime à l'aide de la fonction p les nombres calculés dans les questions a, b et c de la question 1 précédente, puis écris la conjecture de la question d) toujours à l'aide de la fonction p.

b) *Nous allons essayer de voir si la conjecture semble vraie avec un logiciel de géométrie dynamique.*

Si tu possèdes un ordinateur, lance l'application geogebra, puis construis un tricercle de Mohr pour lequel AB = 8 cm. Déplace le point C sur le segment [AB]. Que peux-tu dire du périmètre du tricercle pour chaque position du point C ?

Si tu n'arrives pas à construire la figure dynamique, lis l'aide d'Andry ci-dessous.

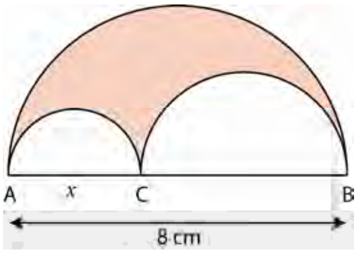


J'ai placé le point A de coordonnées (0,0) et le point B de coordonnées (8,0).
Ensuite, j'ai construit le segment [AB] à l'aide du bouton [Segment entre deux points].
J'ai ensuite placé un point C sur le segment [AB].
Pour créer les demi-cercles, j'ai utilisé le bouton [Demi-cercle créé par deux points] .
Ensuite, pour mesurer la longueur de chaque demi-cercle, j'ai utilisé le bouton [Distance ou longueur] puis j'ai cliqué sur chaque demi-cercle. Dans la fenêtre « saisie », j'ai écrit : perimetre=c+d+e
Enfin, pour afficher la somme de ces trois périmètres, j'ai cliqué sur [ABC Insérer un texte] puis j'ai entré le texte : « périmètre du tricercle = »+perimètre *(il faut écrire les guillemets)*

Si tu n'arrives pas à construire la figure dynamique, ouvre le fichier qui la contient : c'est le fichier sequence6exercice10.

c) Nous allons maintenant étudier de plus près la fonction p.
Ouvre le fichier « sequence6exercice10question2c ». Déplace le point C sur le segment [AB].
Que peux-tu dire de la représentation graphique de la fonction p ?

3- Nous allons voir si la conjecture émise dans les questions précédentes est vraie.



a) Quelles sont les valeurs minimales et maximales de x ?

b) Exprime la longueur du demi-cercle de diamètre [AC] en fonction de x.

c) Exprime la longueur du demi-cercle de diamètre [BC] en fonction de x.

d) Détermine $p(x)$. Est-ce que $p(x)$ dépend du nombre x ?

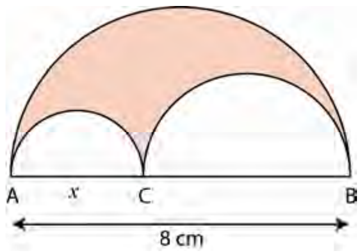
Pour terminer cette séance, reporte-toi à la fiche de calcul mental n°1, à la fin de ce livret. Découpe une partie de la feuille selon les pointillés verticaux, puis replie-la le long des pointillés horizontaux afin de cacher les solutions.
Effectue ensuite la série 1 de cette fiche. Pour cela, lis les calculs proposés, calcule le résultat de tête puis écris les réponses sur une feuille de brouillon.
Une fois la série 1 terminée, reporte-toi aux solutions.

Séance 8
J'étudie l'aire de la surface limitée par le tricercle de Mohr

Effectue l'exercice suivant dans ton cahier d'exercices. Une fois l'exercice terminé, reporte-toi au livret de corrigés et lis attentivement les deux parties : ce que l'on attendait de toi et les commentaires du professeur.

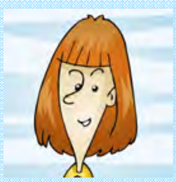
✶EXERCICE 11

Problème : Peux-tu déterminer quand l'aire du tricercle de Mohr est la plus grande ? Quelle est alors cette aire ?



1- La 1$^{\text{ère}}$ question de cet exercice est volontairement « ouverte », c'est-à-dire que dans un 1$^{\text{er}}$ temps, tu n'as pas d'autre aide que les avis de tes camarades Thomas et Aurélie qui eux aussi, comme toi, cherchent à résoudre ce problème.
Essaie de résoudre ce problème pendant 20 minutes. Tu peux utiliser tous les moyens à ta disposition : figure sur du papier, figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, calcul direct de l'aire...

Je n'arrive pas à résoudre le problème à l'aide de calculs. J'ai utilisé geogebra pour étudier l'aire du tricercle. J'ai en fait réutilisé la figure de l'exercice précédent ! Par contre, il y a un petit problème : on ne peut pas calculer l'aire d'un demi-disque, alors pour calculer l'aire du demi-disque de diamètre [AC] par exemple, j'ai créé le milieu du segment [AC] puis j'ai créé le cercle de centre ce milieu passant par A.
Pour calculer l'aire du disque, je clique sur le bouton Aires puis je clique sur le cercle de diamètre [AC].

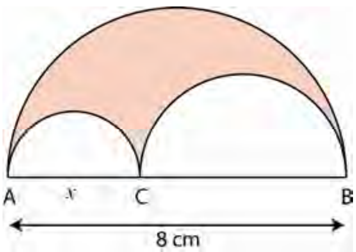


J'ai eu du mal à construire ma figure dynamique, mais grâce à Thomas, j'ai réussi ! Pour faire afficher l'aire du tricercle, j'ai calculé la moitié de l'aire du grand disque moins la somme des aires des deux autres demi-disques.

Pour cela, j'ai repéré comment étaient nommées les aires des disques : on peut savoir par exemple le nom d'un disque en cliquant sur le cercle et en cliquant ensuite sur le bouton droit. Une fenêtre s'ouvre et on peut y lire le nom du disque.
Ensuite, si les disques sont appelés r (pour le grand disque), p et q, j'ai entré dans le champ de saisie : aire= airer/2–airep/2–aireq/2.
J'ai cliqué sur ABC Insérer un texte puis j'ai entré : « L'aire du tricercle est : »+aire

Si, au bout de 20 minutes, tu n'arrives pas à étudier l'aire du tricercle, ouvre le fichier sequence6exercice11question1.

2- On pose x = AC et on appelle f la fonction qui à x associe l'aire du tricercle de Mohr. On cherche dans cette question à calculer l'aire du tricercle en fonction de x, c'est-à-dire à déterminer $f(x)$.



a) Quelle est la valeur minimale pour x ? La valeur maximale ?

b) Exprime l'aire du demi-disque de diamètre [AC] en fonction de x.

c) Exprime l'aire du demi-disque de diamètre [BC] en fonction de x.

d) Démontre que : $f(x) = \frac{\pi}{4}x(8-x)$.

e) Calcule l'arrondi au dixième de l'aire en cm² du tricercle pour les valeurs de AC en cm ci-dessous.
Pour te simplifier la tâche, n'hésite pas à utiliser un tableur. Le nombre π s'écrit « PI() » à l'aide d'un tableur.

AC	0	1	2	3	4	5	6	7	8
aire du tricercle en cm² arrondie au dixième	…….	…….	…….	…….	…….	…….	…….	…….	…….

f) Représente graphiquement la fonction *f* sur ton cahier dans un repère orthogonal où 1 cm représente 1 unité en abscisses et en ordonnées.

Détermine graphiquement :
- la position du point C pour laquelle l'aire du tricercle est maximum,
- l'aire maximum du tricercle.

Si tu possèdes un ordinateur, essaie de retrouver ce résultat en traçant la courbe à l'aide de geogebra.

3- Ouvre le fichier sequence6exercice11question3. Fais tracer par geogebra la représentation graphique de la fonction *f*. Déplace ensuite le point C sur le segment [AB]. Retrouves-tu graphiquement le résultat précédent ?
Aide : pour taper le nombre π à l'aide de Geogebra, on écrit pi.

Pour terminer cette séance, reporte-toi à la fiche de calcul mental n°1, à la fin de ce livret. Découpe une partie de la feuille selon les pointillés verticaux, puis replie-la le long des pointillés horizontaux afin de cacher les solutions.
Effectue ensuite la série 1 de cette fiche. Pour cela, lis les calculs proposés, calcule le résultat de tête puis écris les réponses sur une feuille de brouillon.
Une fois la série 1 terminée, reporte-toi aux solutions.

Séance 9
J'effectue des exercices de synthèse

Effectue l'exercice suivant dans ton cahier d'exercices. Une fois l'exercice terminé, reporte-toi au livret de corrigés et lis attentivement les deux parties : ce que l'on attendait de toi et les commentaires du professeur.

✶EXERCICE 12

Andry et Nadia appliquent chacun un programme de calcul différent. Un nombre étant choisi :
- Andry le multiplie par 5, divise le résultat obtenu par 4, puis enfin il retranche 6.
- Nadia multiplie le nombre par lui-même, divise le résultat obtenu par 4 puis ajoute 3 au résultat.

Problème : est-il possible qu'à partir du même nombre, Andry et Nadia obtiennent le même résultat ?
On va dans cet exercice tenter de résoudre ce problème.

Partie 1 : Je m'exerce

1- Calcule les résultats obtenus par Andry et Nadia à partir de 0, puis à partir de –1, puis enfin à partir de 2.

2- A est la fonction qui associe au nombre x le résultat obtenu par Andry lorsqu'il applique son programme de calcul. Démontre que A est telle que : $A:\ x \mapsto \frac{5}{4}x - 6$

Exprime de la même façon la fonction N qui associe au nombre x le résultat obtenu par Nadia lorsqu'elle applique son programme de calcul.

3- A quoi correspond $A(1)$? Détermine l'image de 1 par la fonction A.
A quoi correspond $N(1)$? Détermine l'image de 1 par la fonction N.

4- Détermine : $A\left(\frac{4}{3}\right)$ et $N\left(\frac{4}{3}\right)$

5- Détermine un antécédent de 3 par la fonction A. Pour quelle(s) valeur(s) de départ Nadia a-t-elle obtenu 3 comme résultat ?

Partie 2 : Je résous le problème

1- Essaie de résoudre le problème par le calcul

2- Trace dans un repère les représentations graphiques des fonctions A et N. Essaie de trouver une solution géométrique au problème.

Enfin, nous allons terminer cette séquence par un test. Lis attentivement les questions et coche la ou les réponses justes directement sur ton livret. Une fois le test effectué, reporte-toi aux corrigés, lis-les attentivement puis entoure en rouge les bonnes réponses.

JE M'ÉVALUE

Dans les questions 1, 2, 3, 4, 5 et 6 on considère la fonction f qui à un nombre associe son triple auquel on retranche 2.

1- Comment peut-on définir la fonction f ?

❐ $f: \; x \mapsto x^3 - 2$

❐ f est telle que $f(x) = 3 + x - 2$

❐ $f: \; x \mapsto 3x - 2$

❐ f est telle que $f(x) = 3x - 2$

2- La fonction f est-elle une fonction linéaire?

❐ oui

❐ non

3- La fonction f est-elle une fonction affine?

❐ oui

❐ non

4- La représentation graphique de la fonction f :

❐ est une droite passant par l'origine.

❐ n'est pas une droite.

❐ est une droite.

5- Quel(s) est (sont) l'(les)antécédent(s) de 0 par f ?

❐ $\frac{2}{3}$ ❐ $-\frac{3}{2}$

❐ $\frac{3}{2}$ ❐ -2

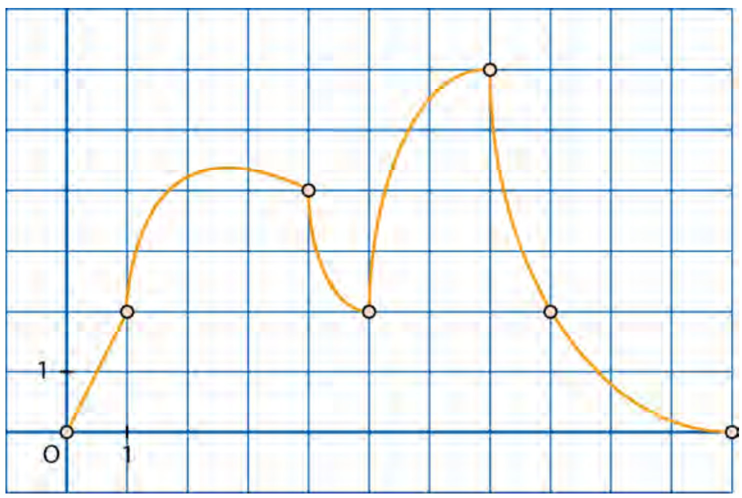
6- Combien 0 a-t-il d'antécédents par la fonction f ?

❐ 0

❐ 1

❐ 2

Dans les questions 7, 8, 9 et 10, on considère la représentation graphique de la fonction f ci-dessous.



7- La fonction f est-elle une fonction affine ?

❐ oui

❐ non

8- Quelle est l'image de 1 par f ?

❐ 2 ❐ 1

❐ 3 ❐ 0

9- Quel(s) est (sont) l'(les) antécédent(s) de 2 ?

❐ 8 ❐ 1

❐ 4 ❐ 5

10- Détermine une solution de l'équation $f(x) = 6$.

❐ 6 ❐ 4

❐ 7 ❐ 3