1 Racine carrée d'un nombre positif

a Définition et exemples

DÉFINITION

a désigne un nombre **positif**.
La racine carrée de a est le nombre **positif** dont le carré est a.
Ce nombre est noté $\sqrt{a}$ (lire « racine carrée de a »).

Remarque : Le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé « radical », il a été introduit en 1525 par l'allemand Christoph Rudolff.

Exemples 1 : cas où $\sqrt{a}$ est un nombre entier.

On sait que	$0^2=0$	$1^2=1$	$2^2=4$	$3^2=9$	$4^2=16$	$5^2=25$	$6^2=36$
Donc	$\sqrt{0}=0$	$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{25}=5$	$\sqrt{36}=6$

Exemples 2 : cas où $\sqrt{a}$ est un nombre rationnel non entier.

- $\sqrt{0,25}=0,5$ (car $0,5^2=0,25$).
- $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ (car $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$).

Exemples 3 : cas où $\sqrt{a}$ est un nombre irrationnel.
$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{4,5}$ ... sont des nombres irrationnels.
La touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice permet d'obtenir des valeurs approchées de ces nombres.

b Propriétés

PROPRIÉTÉ

Quel que soit le nombre positif a,
$$(\sqrt{a})^2=a.$$

Démonstration
Par définition, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a, c'est-à-dire $(\sqrt{a})^2=a$.

Exemples
- $(\sqrt{3})^2=3$
- $(\sqrt{12,34})^2=12,34$
- $\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2=\frac{3}{7}$

PROPRIÉTÉ

Quel que soit le nombre positif a,
$$\sqrt{a^2}=a.$$

Démonstration
Par définition, $\sqrt{a^2}$ est le nombre positif dont le carré est a^2.
Or a est un nombre positif et son carré est a^2, donc $\sqrt{a^2}=a$.

Exemples
- $\sqrt{6^2}=6$
- $\sqrt{15,3^2}=15,3$
- $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$

2 Nombres x tels que $x^2 = a$, avec a nombre positif

PROPRIÉTÉ

a désigne un nombre **positif**.
Les nombres x tels que $x^2 = a$ sont les nombres $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Remarques : • Lorsque $a = 0$, il n'existe qu'un seul nombre tel que $x^2 = 0$: c'est 0 (car $\sqrt{0} = -\sqrt{0} = 0$).
• Lorsque $a < 0$, il n'existe pas de nombre x tel que $x^2 = a$.
En effet, x^2 est toujours un nombre positif donc x^2 ne peut pas être égal au nombre strictement négatif a.

Exemples
- Les nombres x tels que $x^2 = 1{,}44$ sont $\sqrt{1{,}44}$ et $-\sqrt{1{,}44}$, c'est-à-dire 1,2 et –1,2.
- Les nombres x tels que $x^2 = 10$ sont $\sqrt{10}$ et $-\sqrt{10}$.

3 Racines carrées et opérations

a Multiplication et division

PROPRIÉTÉ

Le produit des racines carrées de deux nombres positifs est égal à **la racine carrée de leur produit**.
Ainsi, quels que soient les nombres positifs a et b :

$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{a\,b}$.

Et donc aussi $\sqrt{a\,b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Démonstration

$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = a\,b$.
Or, par définition de la racine carrée, $\sqrt{a\,b}$ est **le seul** nombre positif dont le carré est $a\,b$.
Donc $\sqrt{a\,b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Exemples : • $\sqrt{3} \times \sqrt{8} = \sqrt{3 \times 8} = \sqrt{24}$ • $\sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$

PROPRIÉTÉ

Le quotient des racines carrées de deux nombres positifs est égal à **la racine carrée de leur quotient**. Ainsi, quels que soient les nombres positifs a et b, avec $b \neq 0$:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Et donc aussi $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemples : • $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$ • $\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

b Addition et soustraction

Attention ! Les propriétés précédentes ne s'étendent pas à l'addition et la soustraction.

Exemples
- $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ donc $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$.
- $\sqrt{225-144} = \sqrt{81} = 9$ et $\sqrt{225} - \sqrt{144} = 25 - 12 = 13$ donc $\sqrt{225-144} \neq \sqrt{225} - \sqrt{144}$.